Posledně: • $\omega = \bigcap\{z : z \text{ je induktivní}\}$

• z je induktivní: $\overset{=0}{\emptyset} \in z \;\wedge$

$\wedge\; (\forall n)\, n \in z \longrightarrow n \cup \{n\} \in z$.

Věta I (Princip mat. indukce)

Buď $\varphi(n)$ formule JTM. Pokud

$$\boxed{\varphi(0) \;\wedge\; (\forall n \in \omega)\, \varphi(n) \longrightarrow \varphi(n \cup \{n\})}$$

potom $\boxed{(\forall n \in \omega)\, \varphi(n)}$.

Věta II (Alt. formulace PI)

Buď z množina taková, že

$0 \in z \;\wedge\; (\forall n \in \omega)\, n \in z \longrightarrow n \cup \{n\} \in z$.

Pak $z \supseteq \omega$.

Obě formulace jsou ekvivalentní:

Víme-li, že platí VII: Chceme VI:

Máme formuli φ, která splňuje [předp.] VI.

Položíme $z = \{n \in \omega : \varphi(n)\}$.

Pak podle [předp.] $0 \in z$ (neboť $\varphi(0)$)

Dále: $n \in z \Rightarrow \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n \cup \{n\})$

$\Rightarrow n \cup \{n\} \in z$.

Podle VII, protože z splňuje předp. VII,

$z \supseteq \omega$, tj. $\varphi(n)$ platí pro vš. $n \in \omega$.

Naopak: VI $\Longrightarrow$ VII snadné cvičení.

Nyní dokážeme VII, budeme tedy mít obě formulace.

Důkaz VII: nechť jsou splněny předp.

VII, tj.: $0 \in z$ $\wedge$

$\wedge$ $(\forall n \in \omega)\ n \in z \rightarrow n \cup \{n\} \in z$.

Chceme: $z \supseteq \omega$.

Podle předpokladu z je induktivní množina. Ale $\omega = \bigcap \{y : y \text{ ind}\}$

$\Rightarrow \omega \subseteq z$. ⊠

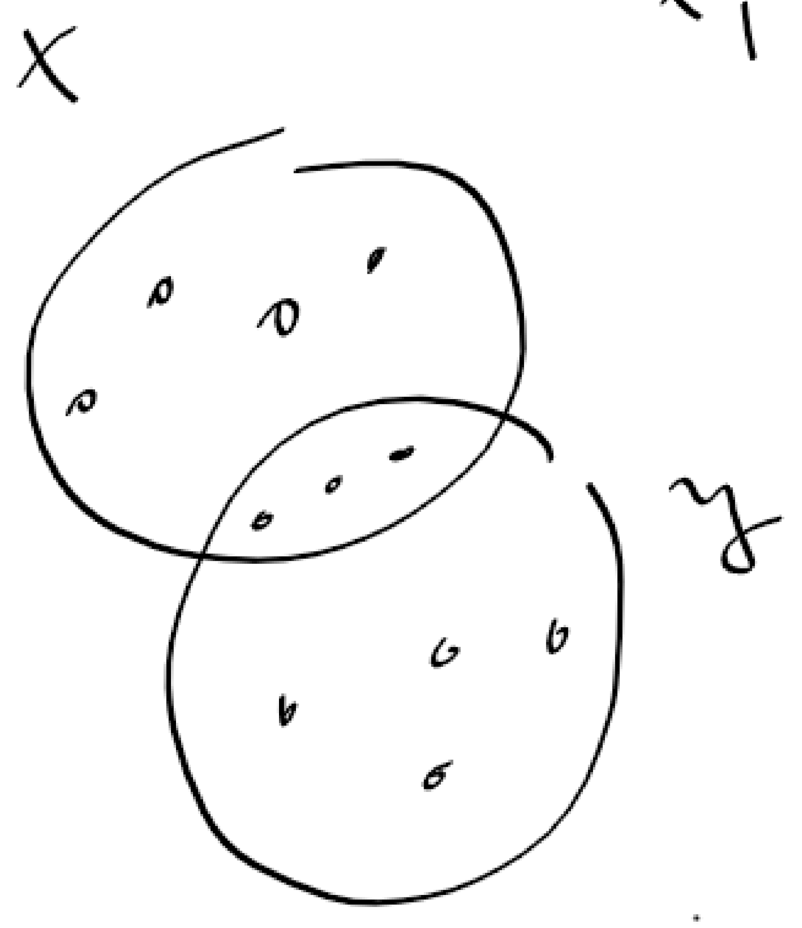
Operace na ω (na $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$):

Když x, y jsou libovolné množiny:

- $x \uplus y = \underbrace{(\{0\} \times x)} \cup \underbrace{(\{1\} \times y)}$

(„disj. sjednocení")

Obr.:

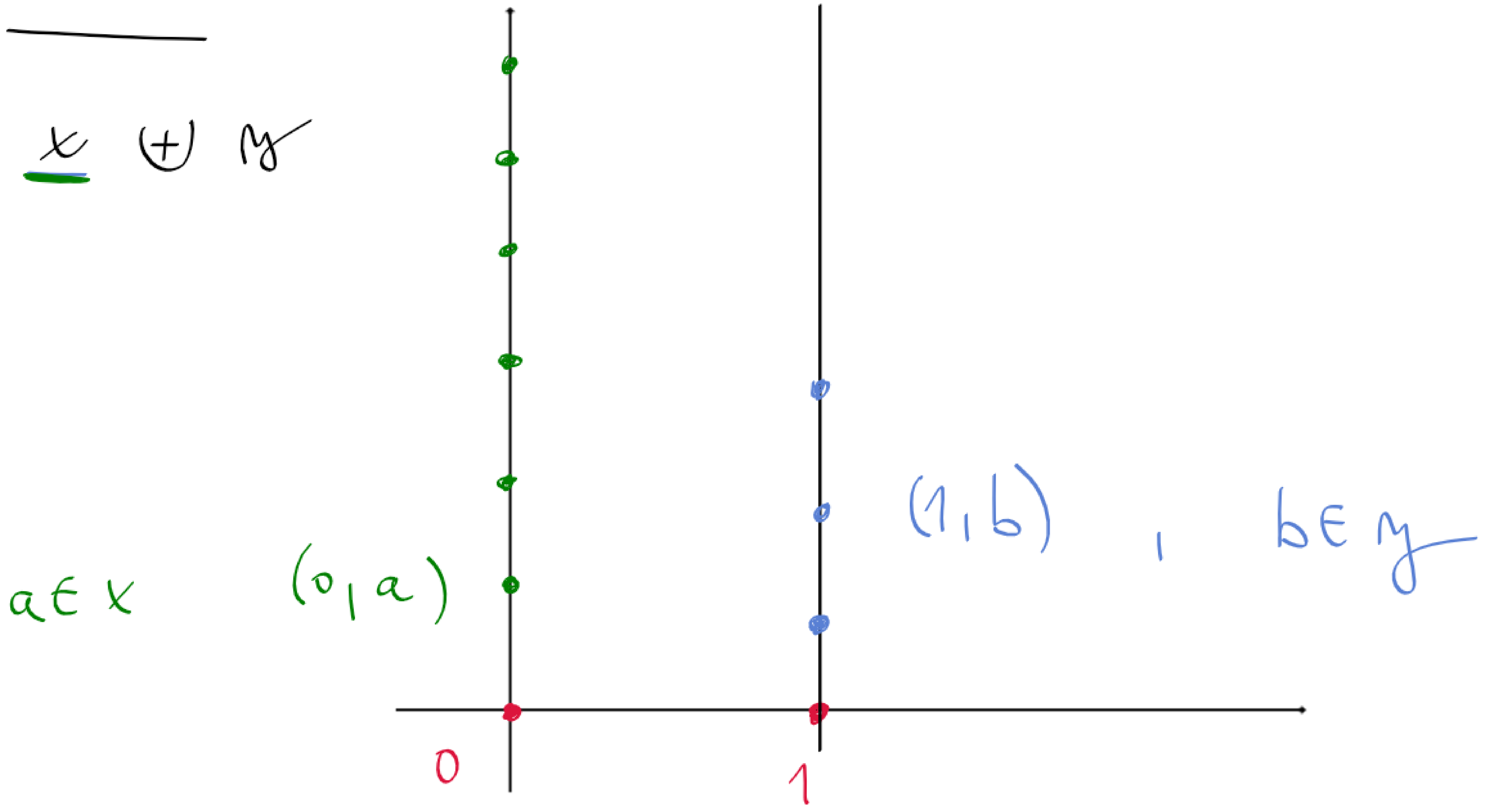


x, y konečné

$x \cap y \neq \emptyset$

$x \cup y$ „má méně prvků než $|x| + |y|$".

$x \uplus y$



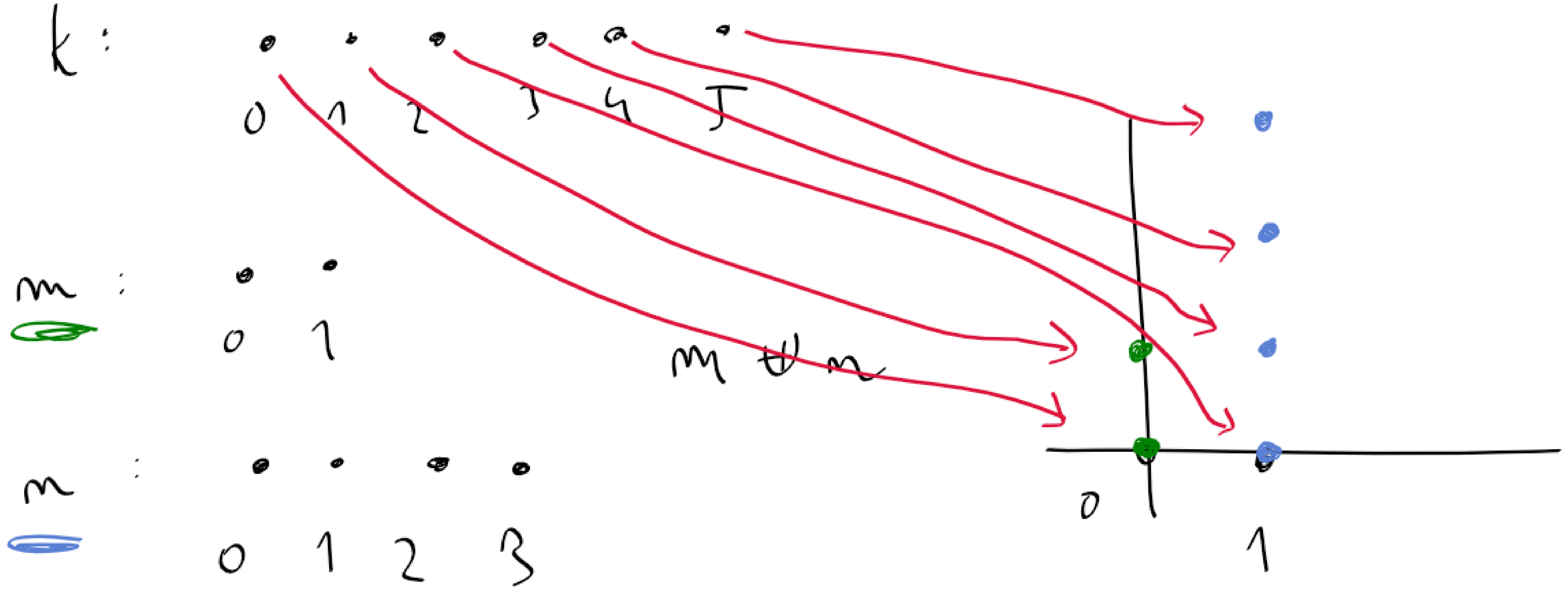
• součin: $x \times y$ kartézský.

• mn. mocnina: ${}^{y}x = \{ f : f : y \to x \}$.

Definice: Buďte $m, n \in \omega$, $k \in \omega$

• $m + n = k \overset{\text{def.}}{\iff} k \approx m \uplus n$

⌈ Bijekce $f : k \to m \uplus n$



• $m \cdot n = k \overset{\text{def.}}{\iff} k \approx m \times n$

• $m^{n} = k \overset{\text{def.}}{\iff} k \approx {}^{n}m$.

Definice: • $m < n \overset{\text{def.}}{\iff} m \in n$

• $m \leq n \overset{\text{def.}}{\iff} m < n \lor m = n$.

Lemma: (i) $n \in \omega \Rightarrow n \subseteq \omega$

(ii) $m \leq n \iff m \subseteq n$ (Pro $m, n \in \omega$)

$m < n \iff m \subset n$

(iii) $(\forall m, n \in \omega)\ m \in n \lor m = n \lor n \in m$.

Důkaz: (i) Indukcí: $\emptyset = 0 \in \omega$ máme. (každá ind. množina nulu obsahuje) $0 = \emptyset \subseteq \omega$. Tedy 0 to splňuje. Nechť $n \in \omega$ splňující $n \subseteq \omega$.

Chceme $n \cup \{n\} \subseteq \omega$. I.P.

Ale to je jasné, protože $n \subseteq \omega$ $\wedge$ $\{n\} \subseteq \omega$ ($n \in \omega$). Tedy podle Principu ind $(\forall n \in \omega)\ n \subseteq \omega$. $\boxtimes$

(ii) • $n = 0$ … pak zřejmě $m < n \Rightarrow m \subset n$ ✓. $\forall m$

• nechť platí pro n; nechť $m < n \cup \{n\}$.
Pokud $m < n$, pak $m \subset n \subseteq n \cup \{n\}$ podle indukčního předpokladu. Pokud $m = n$ (jediná alternativa), pak $m = n \subseteq n \cup \{n\}$.
Přitom ale $n \notin n$ (snadné cvičení opět na indukci)
Takže ve skutečnosti zde lze psát $\subset$.
Tedy $m < n \cup \{n\} \longrightarrow m \subset n \cup \{n\}$. (*) Dokonč na pol. STR.!

Věta: $<$ je dobré uspořádání na ω.

Důkaz: Víme: • $<$ antireflexivní ($n \in \omega \longrightarrow n \notin n$),

• $<$ je antisymetrická:
nemůže být $m < n \wedge n < m$ $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow m \in n \wedge n \in m$
$\Longleftrightarrow m \subset n \wedge n \subset m$ ↯

• tranzitivita $m < n < k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\Longleftrightarrow m \in n \in k \overset{L.}{\Longleftrightarrow}$
$\Longleftrightarrow m \subset n \subset k \Rightarrow m \subset k$
$\Longleftrightarrow m < k$.

Tedy $(\omega, <)$ je uspořádání, a to lineární (díky L(iii)).

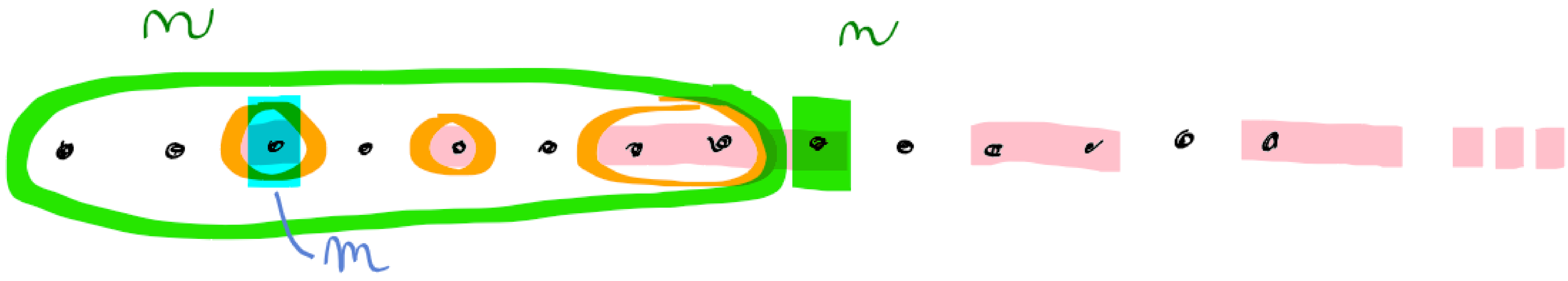
Dobré uspořádání: (Tj. $\forall A \subseteq \omega$, $A \neq \emptyset$: A má nejmenší prvek.)

Buďiž $\emptyset \neq A \subseteq \omega$ libovolná. Zvolme $n \in A$ libovolný prvek. n je konečná.

- Pokud n je nejm. prvek A, jsme hotovi.
- Pokud n není nejm., pak existuje $k \in A$, $k < n$. Tedy $k \in n \cap A$,

Takže $n \cap A \neq \emptyset$ (Protože $\nearrow$),

$n \cap A \subseteq n$ je konečná. Tedy má nejmenší prvek m. Pak $m = \min A$.



Další číselné obory:

- $\mathbb{Z} = (\{0\} \times \omega) \cup (\{1\} \times \omega \setminus \{0\})$

$\underbrace{(0,0)}_{„0"}, \underbrace{(0,1)}_{„1"}, \underbrace{(0,2)}_{„2"}, \dots$ nezáporná

$\dots (1,2), (1,1), (0,0), (0,1) \dots$

$\underbrace{(1,1)}_{„-1"}, \underbrace{(1,2)}_{„-2"}, \underbrace{(1,3)}_{„-3"} \dots$

Pozor: $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}$. V praxi zapomínáme na ω a chápeme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Q} = \{(m,n) : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\} / \sim$

$\sim$ je ekvivalence definovaná:

$$(m,n) \sim (m',n') \overset{def}{\iff} \text{„} \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \text{“}$$

$$\iff m \cdot n' = m' \cdot n$$

(aritm. operace na $\mathbb{Z}$ jsme nice nedefinovali, jsou ale jasné.)

$$(2,1) \text{ „} = \frac{2}{1} \text{“}$$

$$(4,2) \text{ „} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = (2,1) \text{“}$$

$$2 = \{(2,1),\ (4,2),\ (6,3),\ \dots\}$$

$$\{(2,1),\ \boxed{(4,2)},\ (6,3),\ \dots\} + \{(1,3),\ (2,6),\ \boxed{(3,9)},\ \dots\} = \{(7,3),\ (21,9),\ (42,18),\ (14,6),\ (28,12),\ \dots\}$$

$$(4,2) + (3,9) = (42,18)$$

$$\left[\ \frac{4}{2} + \frac{3}{9} = \frac{36+6}{18} = \frac{42}{18}\ \right]$$

- Takto se definuje sčítání

$$\left[\ \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot n' + m'n}{n \cdot n'}\ \right.$$

$$\left. (m,n) + (m',n') = (m \cdot n' + m'n,\ n \cdot n')\ \right]$$

- nezáleží na volbě reprezentantů.

(*) Dokončení dk:

Podle principu indukce tedy:

$(\forall n \in \omega) : \left[(\forall m \in \omega)\ m < n \rightarrow m \subset n \right]$

Opačná implikace: nechť $m, n \in \omega$, $m \subset n$. Chceme $m < n$.

Zřejmě $m \neq n$ (protože $m \subset n$ ... vlastní (!) podmnožina). Kdyby $m > n$, pak $m \supset n$, což je spor s naším předp $m \subset n$.

<u>Celkem</u>: $m \neq n$, $\neg(m > n)$, takže jediná možnost (Lemma (iii)): $m < n$. $\boxtimes$